Leçon 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales en fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

1. Méthodes ce calcul internes. —

1. Evaluation d'une primitive. —

- Rem : La linéarité de l'intégrale permet de casser la recherche de la primitive en des recherches plus simples
- Théorème de Newton-Leibniz
- Quelques primitives usuelles ($\int \frac{1}{1+x^2}dx$, $\int_{\mathbb{R}^+} \lambda exp(-\lambda x)dx$,..)
- Calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle par Décompo en éléments simples

2. Intégration par parties. —

- Intégration par Parties
- Intégrale de Wallis
- $\Gamma(x)x = \Gamma(x+1)$
- Autre exemple classique

3. Théorèmes de Fubini. —

- Théorème de Fubini sur $\mathbb{R}^n$: Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ mesurable. Alors les intégrales suivantes existent et vérifient : $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}_m} f(x,y)dy)dx = \int_{\mathbb{R}^m}(\int_{\mathbb{R}_n} f(x,y)dx)dy$. Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ est intégrable, on a les mêmes égalités.
- Calcul de l'intégrale de Gauss ($\int_{\mathbb{R}} exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$)
- Volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$ ($V_n = \frac{\Pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{2}{2})!}$ si n pair)
- Intégrale de Fresnel : $\int_{\mathbb{R}} cos(x^2)dx = \int_{\mathbb{R}} sin(x^2)dx = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

4. Changement de variables. —

- Théorème : Pour U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ C^1-difféom de jacobien J_Φ, pour $V := \Phi(U)$, et pour tout $f : V \to \mathbb{C}$ mesurable, on a : $\int_V f(v)dv = \int_U (f \circ \Phi)(u)det(J_\Phi(u))du$
- Changement de variables polaire $dxdy = rdrd\theta$
- Changement de variables cylindrique $dxdydz = rdrd\theta dz$
- Ex : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin(t))dt = \frac{-\pi}{2}.ln(2)$
- Calcul d'intégrale d'une série trigonométrique en $cos(\theta)$ avec $t = tan(\frac{\theta}{2})$

5. Formule de Green-Riemann. —

- Soit K un compact à bords de $\mathbb{R}^2$ et $Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert U contenant K. Alors : $\int_{\partial K^+}(Pdx + Qdy) = \iint_K (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$
- Calcul de l'aire d'un compact à bords : $A = \iint_K dxdy = \int_{\partial K^+}(x.dy)$
- Calcul de l'aire de la Laimniscate (bord donné par $r^2 = a^2 cos(2\theta)$)

2. Méthodes de calcul externes. —

1. Convergence de suite/séries. —

- Théorème de Beppo-Levi (X, A, μ) espace mesuré et $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_n f_n$ est A-mesurable et $\int_X lim_n(f_n)d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$
- Appli : Interversion série-intégrale pour $(f_n)_n$ suite de fonctions mesurables positives
- Interversion limite-intégrale (CV dominée, série alternée)
- Exemple
- Exemple de calcul d'une IàP
- Théorème de continuité et dérivabilité des IàP
- Ex : Pour X de loi $N(0,1)$, $\Phi_X(t) = \sqrt{\pi}.exp(-\frac{t^2}{4})$
- Exemple de calcul d'intégrale via une équa diff

2. Théorème des zéros isolés et formule des résidus. —

- Définition de l'indice d'un lacet : $Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}.\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$
- Formule de Cauchy
- Théorème des zéros isolés
- Ex : Calcul de la transformée de Fourier de $exp(-\frac{x^2}{2})$ par prolongement holom
- Définition du résidu avec le développement en série de Laurent
- Formule des résidus
- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$
- **Dev** : Formule des compléments : $\Gamma(z)\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{sin(\pi z}$ $\forall z$ tq $0 < Re(z) < 1$.
  Cela permet de prolonger analytiquement la fonction Γ à $\mathbb{C} - \{-n, n \in \mathbb{N}\}$.
- Calcul de $\int_{\mathbb{R}} exp(-x^2)dx$

3. Approximations numériques pour le calcul approché. —

- Méthode par interpolation de Lagrange
- Méthode des rectangles à gauche
- Méthode des rectangles à droite
- Méthode du point-milieu
- Méthode des trapèzes (résumées en tableau pour pas bouffer trop de place)
- Un exemple
- **Dev** : Approximation d'intégrale par la méthode de Monte-Carlo : Soit $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ intégrable. On note $I = \int_{[0,1]^d} f(x)d\lambda(x)$.
  Pour $X_{n,k}$ des v.a. réelles iid de loi $U_{[0,1]}$, on construit $Y_n := (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d})$ qui est une famille de v.a. iid de loi uniforme sur $[0,1]^d$. On note $S_n = (f(Y_1) + \cdots + f(Y_n))/n$.
  Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leq (\frac{\|f\|_2}{\|f\|_\infty})^2$ assez petit, on a : $P(I - S_n > \varepsilon) \leq 2\exp(-n(\frac{\varepsilon\|f\|_\infty}{\|f\|_2})^2)$.
  L'approximation de l'intégrale de f par le barycentre de n évaluations données par des v.a. uniformes a ainsi une probabilité de ne pas être ε-proche de l'intégrale de f qui décroît exponentiellement en n.

Références
Gourdon : Partie I
Briane,Pagès : Volume de la boule unité et exemples et Beppo-Levi
Amar-Materon : Formule des compléments(Dev) , partie holomorphie
Ouvrard, Probas 2 : Méthode de Monte Carlo.(Dev)(incomplet)
Demailly : Partie analyse numérique.

June 11, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes